

**ملاحظة 1:** من خلال المباشرة السابقة بينا بانها إذا كانت الدوال  $y_1, y_2$  دوال مرتبطة خطياً فإن قيمته عدد فروشكي يساوي صفر أي أن إقدام عدد فروشكي هو شرط لازم ولكنه غير كافٍ كما نؤكد ذلك في المثال ديباً أيضاً من خلال مثال آخر إقدام عدد فروشكي  $\neq 0$  يعني بضرورة أن الدوال مرتبطة خطياً. والمثال كان هو:  $y_1 = x^3$ ,  $y_2 = |x^3|$ .

**2- أثبتنا أيضاً أنه إذا كان لدينا معادلة تفاضلية  $(y) = 0$  خطية متجانسة وكان  $y_1, y_2$  حلولاً لهذه المعادلة ففرضنا الشرط اللازم والكاف لكي تكون هذه الدوال مستقلة خطية هو أن يكون عدد فروشكي  $\neq 0$ . وإذا كان يساوي صفر فمترتب خطياً هذا يعني أنه إذا كان لدينا حلول للمعادلة تفاضلية  $\neq 0$  فإن عدد فروشكي  $\neq 0$  يساوي صفر أما إذا كان لدينا حلول للمعادلة تفاضلية معطاة  $= 0$  فإن عدد فروشكي يساوي صفر.**

**مثال:** لكن لدينا المعادلة تفاضلية:

$$y'' = 0 - \frac{1}{x} y' - \frac{3}{x^2} y = 0$$

إن الدالتين:  $y_1 = x^3$ ,  $y_2 = |x^3|$  مع قاعدة الحلول لهذه المعادلة.

إذاً لكي تتحقق البرهنة الأخيرة التي درسناها في المباشرة سابقة يجب أن تكون دوال المعادلات دوال متفرقة.

**تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية:**

درسنا في ملاحظات 1 تحويل تخفيض رتبة المعادلة التفاضلية مرتبة واحدة  $Z = \frac{y'}{y}$  أو  $Z = \ln y$  لكن هذا تخفيضاً قد يؤدي إلى معادلة تفاضلية خطية.

**مثال:** لكن لدينا المعادلة:

$$y'' + (1-x)y' + y = 0$$

التحويل  $Z = \frac{y'}{y}$  نستنتج  $y' = yZ$   $\Rightarrow y'' = y'Z + yZ' = yZ^2 + yZ'$

$$y'' = y'Z + yZ' = yZ^2 + yZ'$$

نقوم في معادلاتنا في صفحة.



(3)

$$y z^2 + y z' + (1-x)y \cdot z + y = 0$$

$$z^2 + z' + (1-x)z + 1 = 0$$

~~$$z^2 + z' + (1-x)z + 1 = 0$$~~

والمعادلة الناتجة غير خطية لوجود  $z^2$ .

لنخفض رتبة المعادلة درجة واحدة لكن المعادلة الناتجة غير خطية.

**\* لتفويض رتبة معادلة تفاضلية خطية مطواة:**

$$(1) \quad P_n(x) \cdot y^n + P_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_1(x) \cdot y' + P_0(x) \cdot y = 0$$

ولنفرض أن  $y_1 \neq 0$  حلًا خاصًا لهذه المعادلة غير صغرية عندئذ التحويل:

$$u = \left( \frac{y}{y_1} \right)' \quad \text{أو} \quad y = y_1 \int u dx \quad (2) \quad \text{نشتق (2) بحدد من المرات يساوي}$$

رتبة المعادلة التفاضلية المطواة.

المعادلة المطواة من الدرجة  $n$  نشتق  $n$  مرة.

$$y' = y_1' \int u dx + y_1 \cdot u$$

$$y'' = y_1'' \int u dx + 2y_1' \cdot u + y_1 \cdot u'$$

$$y''' = y_1''' \int u dx + y_1'' u + 2y_1' \cdot u + 2y_1' \cdot u' + y_1' \cdot u' + y_1 \cdot u''$$

$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u dx + 3y_1'' u + 3y_1' u' + y_1 u''$$

ونعلم أن قانون لبتز المشتقات العليا هو:

$$(u \cdot v)^n = u^n v + n u^{n-1} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{n-2} \cdot v'' + \dots + u \cdot v^{(n)}$$

وبالتالي فإن:



$$y^{(n)} = y_1^{(n)} \cdot \int u dx + n \cdot y_1^{(n-1)} \cdot u + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot y_1^{(n-2)} \cdot u^2 + \dots + y_1 \cdot u^{(n-1)}$$

نقوم بهذه المشتقات من المعادلة (1) ومن ثم نختصر ونقسم على  $y_1$  فنحصل على معادلة تفاضلية من الدرجة  $n$ .

$$(3) \quad u^{(n-1)} + \beta_{n-1}(x) \cdot u^{(n-2)} + \dots + \beta_1(x) \cdot u' + \beta_0(x) \cdot u = 0$$

وهذه المعادلة كعادتنا خطية مع معادلة تفاضلية خطية من الدرجة  $n-1$  أي تم تخفيضها للمعادلة المعطاة  $n$  مرتبة واحدة وذلك من خلال معرفة حل لها من واحد بك  $y_1$  وهي صفر وهو  $y_1$ .

لنفرض أن قاعدة الكلول للمعادلة (3) صحيحة:

$$u_2, u_3, \dots, u_n$$

كما أن هذه الكلول مستقلة خطياً أي أن  $u_2, u_3, \dots, u_n$  هي حلول للمعادلة (3) ويكون الدوال:

$$y_2 = y_1 \int u_2 dx, \quad y_3 = y_1 \int u_3 dx, \quad \dots, \quad y_n = y_1 \int u_n dx$$

وهي قاعدة الكلول للمعادلة التفاضلية المعطاة (1) وذلك لأن كل دالة من هذه الدوال حل للمعادلة (3) وهذه الدوال  $y_2, y_3, \dots, y_n$  هي حلول مستقلة خطياً. كما أن هذه الدوال مستقلة خطياً. لنبين أن هذه الدوال مستقلة خطياً من أجل ذلك نفرض جد  $n$  أن هذه الدوال مرتبطة خطياً. عندئذ يوجد  $n$  من الثوابت العددية  $A_1, A_2, \dots, A_n$  غير معدومة بأن واحد  $A_i \neq 0$  بحيث أن:

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = 0$$

وبالتالي فإن:

$$A_1 y_1 + A_2 y_1 \int u_2 dx + \dots + A_n y_1 \int u_n dx = 0$$

أي أن:

$$A_1 + A_2 \int u_2 dx + \dots + A_n \int u_n dx = 0$$

باشتقاق هذه العلاقة مرة واحدة بالنسبة لـ  $x$  فنجد أن:

$$A_2 u_2 + \dots + A_n u_n = 0$$

نتحقق هذه العلاقة من أجل ثوابت  $A_2, A_3, \dots, A_n$  غير معدومة. هذا خطأ.



يجب أن نتخذ قاعدة حلول للمعادلة (1) ما يلي: أن الفرض الذي يجب أن

والثالثه فإن الحل العام للمعادلة المعطاة الحل هو من الشكل:

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

حيث  $C_1, C_2, \dots, C_n$  ثوابت اختيارية.

مثال 1 يمكن لدينا المعادلة تفاضلية التالية:

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

أوجد الحل العام للمعادلة السابقة، إذا علمت أن  $y_1 = x$  حل لهذه المعادلة.

لتحقيق رتبة المعادلة التفاضلية مرتبة واحدة نجرب الفرض على التغيرات التالية من الشكل:

$$y = x \int u dx$$

$$y = y_1 \int u dx$$

$$y' = x \int u dx + x \cdot u$$

$$y'' = 2u + x \cdot u'$$

نعوين في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أن:

$$(x-1)(x \cdot u' + 2u) - x(x \int u dx + x u) + x \int u dx = 0$$

$$(x-1)x \cdot u' + 2xu - 2u - x^2 \int u dx - x^2 u + x \int u dx = 0$$

$$(x-1)x \cdot u' - (x^2 + 2x + 2)u = 0$$

هذه المعادلة معادلة تفاضلية خطية من الدرجة الأولى متجانسة تقابل معادلة الخطية ومفصلة المتغيرات وهذه المعادلة يجب أن تكون بالشكل:

$$\frac{u'}{u} = \frac{x^2 + 2x + 2}{x(x-1)}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - x \overline{) x^2 - 2x + 2} \\ \underline{-x^2 + x} \phantom{+2} \\ -x + 2 \end{array}$$

$$\frac{u'}{u} = 1 + \frac{-x+2}{x^2-x}$$

$$\frac{u'}{u} = 1 + \frac{-x+2}{x^2-x}$$



$$\frac{u'}{u} = 1 - \frac{x-2}{x(x-1)}$$

$$(*) \quad \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{x-2}{x(x-1)}$$

لفرقة الحسور:

نضرب بـ  $x$  فنحصل على:

$$A + \frac{Bx}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$$

$$A = \frac{-2}{-1} = 2 \quad \text{من أجل } x=0 \text{ يكون}$$

نضرب \* بـ  $x-1$  فنحصل على:

$$\frac{A(x-1)}{x} + B = \frac{x-2}{x}$$

$$B = \frac{1-2}{1} = -1 \quad \text{نعوض كل } x \text{ بـ } 1 \text{ فنحصل على:}$$

$$\frac{u'}{u} = 1 - \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} \right) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1}$$

بالمكاملة فنحصل:

$$\ln \frac{u}{e} = x - 2 \ln x + \ln(x-1)$$

$$\ln \frac{u}{e} = x + \ln \frac{x-1}{x^2} \quad \text{أي } e^{x + \ln \frac{x-1}{x^2}} = e^x \cdot e^{\ln \frac{x-1}{x^2}}$$

ومن هنا:

$$\frac{u}{e} = e^x \cdot \frac{x-1}{x^2}$$

$$y_2 = y_1 \int u_2 dx$$

ومن أجل  $C=1$  يكون:

$$u_2 = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$$

ومن هنا:

$$y_2 = y_1 \int u_2 dx = x \int \left( \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} \right) dx$$



$$y_2 = x \left[ \int \frac{e^x}{x} dx - \int \frac{e^x}{x^2} dx \right]$$

ومن هنا:

لنحسب قيمة التكامل  $\int \frac{e^x}{x^2} dx$  بالمثل بالتجزئة:

$$e^x dx = du \Leftrightarrow e^x = u$$

$$-\frac{1}{x} = v \Leftrightarrow \frac{dx}{x^2} = dv$$

$$\int \frac{e^x}{x^2} dx = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x} dx$$

$$y_2 = x \left[ \int \frac{e^x}{x} dx + \frac{e^x}{x} - \int \frac{e^x}{x} dx \right] = x \left[ \frac{e^x}{x} \right] = e^x$$

$$w(y_1, y_2) = w(x, e^x) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = x e^x - e^x \neq 0$$

مستقلة خطياً

$$y_n = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 x + c_2 e^x$$

عندئذ الكُل العام

حيث  $c_1$  و  $c_2$  هي ثوابت اختيارية

! \*

لكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة  $n$ :

$$(1) \quad P_n(x) \cdot y^{(n)} + P_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + P_1(x) \cdot y' + P_0(x) \cdot y = 0$$

ولنفرض أن علم  $K$  حلاً خاصاً ومستقلاً خطياً للمعادلة (1)أي  $y_1, y_2, \dots, y_n$  حلول خاصة مستقلة خطياً للمعادلة (1)عندئذ يمكن تحقيق رتبة المعادلة  $K$  مرة متتالية أي نحصل معادلة تفاضلية منالرتبة  $n-K$ : باستعمال الخطوات السابقة نحصل على معادلةمن الرتبة  $n-1$



SUBJECT:

$$(2) \quad u^{(n-1)} + \beta_{n-2}(x) u^{(n-2)} + \dots + \beta_1(x) u' + \beta_0(x) u = 0$$

$$y_2 = y_1 \int u_2 dx$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int u_2$$

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = u_2$$

$$u_3 = \left( \frac{y_3}{y_1} \right)'$$

$$u_k = \left( \frac{y_k}{y_1} \right)'$$

باستخدام التحويل .

$$u = u_2 \int x dx$$

يمكن تخفيض رتبة المعادلة (2) مرتبة واحدة

وذلك بأن نشق العلاقة \* عدد من المرات المتتالية بإدوي n-1

ثم نفرض بالمعادلة (2) ترتيب المشتقات عن المشتقة العليا إلى المشتقة الدنيا فنحصل على الشكل:

$$(3) \quad x^{(n-2)} + \alpha(x) x^{(n-3)} + \dots + \alpha_1(x) x' + \alpha_0(x) x = 0$$

وهذه المعادلة كما نلاحظ هي معادلة تفاضلية

خطية من الرتبة 1-2

عندئذ تكون الدوال

$$u_3 = u_2 \int x_3 dx$$

$$u_4 = u_2 \int x_4 dx$$

$$u_k = u_2 \int x_k dx$$

هي حلول لهذه المعادلة

أي أن =

$$x_3 = \left( \frac{u_3}{u_2} \right)'$$

$$x_4 = \left( \frac{u_4}{u_2} \right)'$$

$$x_k = \left( \frac{u_k}{u_2} \right)'$$

هي حلول خاصة للمعادلة (3)

باستخدام الدالة x يمكن تخفيض المعادلة (3) مرتبة واحدة من خلال القسمة



أ. ن. :  $x^2 h^2 = 2$   
 نشأت المعادلة  $n-2$  مرة متتالية نفرض بالمعادلة (3) نحصل على معادلة تفاضلية من الشكل :

$$h^{(n-3)} + \delta_{n-4} \cdot h^{n-4} + \dots + \delta_1(x) \cdot h' + \delta_0(x) \cdot h = 0$$

تتابع العمل على هذا النوال نحصل بالآخر على معادلة تفاضلية من الشكل :

$$Z^{(n-k)} + \beta_{n-k-1}(x) \cdot Z^{n-k-1} + \dots + \beta_1(x) \cdot Z' + \beta_0(x) \cdot Z = 0$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة  $n-k$  أما أن تم تخفيض رتبة المعادلة المعطاة كما مرة، بعمود  $k$  حلًا مستقلًا للمعادلة معطاة.

في إيجاد الحل العام للمعادلة تفاضلية من الرتبة  $n-1$  توجد  $n-1$  حل خاص للمعادلة.

من خلال ما سبقه نلاحظ أنه إذا أعطينا معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ~~والمعادلة~~ وإعطينا حل خاص واحد عندئذ يمكن تخفيض رتبة المعادلة المعطاة مرتبة واحدة يمكن إيجاد حل خاص لها.

★ وإذا أعطينا معادلة خطية من رتبة الثالثة وطلب إيجاد الحل العام يلزم أن أعطى حلين خاصين مستقلين خطياً يمكن تخفيض رتبة المعادلة مرتبتين.

★ وإذا أعطينا معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الرابعة وطلب إيجاد الحل العام يلزم أن أعطى ثلاث حلول خاصة ومستقلة عندئذ يمكن تخفيض رتبة المعادلة ثلاث مرات متتالية فالحل على معادلة من الرتبة الأولى.

★ بشكل عام إذا أعطينا معادلة تفاضلية خطية من الرتبة  $n$  وطلب إيجاد الحل العام باستخدام طريقة تخفيض الرتبة يلزم أن أعطى  $n-1$  حلًا خاصًا.

لأنه باستخدام هذه الحلول الخاصة يمكن تخفيض  $n-1$  مرة متتالية فالحل على معادلة خطية من الرتبة الأولى.



مثال: لكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x y' - 6y = 0$$

أوجد الحل العام باستخدام طريقة تخفيض الرتبة.

$$y_1 = x^3$$

إذا علمت أن  $y_1 = x^3$  هو حلان خاصان لهذه المعادلة.

?

$$y = y_1 \int u dx = x \int u dx \quad \text{نفرض أن}$$

$$y' = \int u dx + x \cdot u$$

$$y'' = 2u + x \cdot u'$$

$$y''' = 3u' + x \cdot u''$$

نفوض في معادلة تفاضلية فنجد أن:

$$x^3 (3u' + x u'') - 3x^2 (x u' + 2u) + 6x (x u + \int u dx) - 6x \int u dx = 0$$

$$6x \int u dx = 0$$

$$x^4 u'' + 3x^3 u' - 3x^3 u' - 6x^2 u + 6x^2 u + 6x \int u dx - 6x \int u dx = 0$$

$$x^4 u'' = 0 \Rightarrow u'' = 0 \quad (2)$$

هذه المعادلة معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية

والدالة

$$u_2 = \left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = \left( \frac{x^3}{x^3} \right)' = (x')'$$

$$u_2 = 2x$$

وهذه الدالة هي حل المعادلة (2)

$$u = u_2 \int 2x dx \Rightarrow u = 2x \int 2x dx$$

$$u' = 2 \int 2x dx + 2x \cdot 2x$$

$$u'' = 4x + 2x \cdot 2x'$$

بالتعويض في (2)

$$2x \cdot 2x' + 4x = 0 \Rightarrow 2x \cdot 2x' = -4x$$

معادلة ذات متغيرات منفصلة تفصل متغيرات متوحدًا

$$\frac{2x'}{2x} = -\frac{2}{x}$$



SUBJECT:

$$\ln \frac{v}{c} = -2 \ln x = \ln \frac{1}{x^2}$$

بالمكاملة:

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{x^2} \quad \text{أي أن}$$

$$v = \frac{1}{x^2} \quad \text{ومن أجل } c=1 \text{ يكون}$$

$$u_3 = u_2 \int v_3 dx \quad \text{ومن ثم يكون}$$

$$u_3 = 2x \int \frac{1}{x^2} dx = -2$$

$$y_3 = y_1 \int u_3 dx = x \int -2 dx = -2x^2$$

الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 x + c_2 x^3 + c_3 x^2$$

**حالة خاصة:**

إذا كان لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية أي

$$(1) \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

وكان  $y_1$  حلاً خاصاً لها عندئذ التحويل

$$y = y_1 z$$

حيث  $z$  هو متغير تابع جديد يمكننا من الحصول على الحل العام للمعادلة (1)

كما يلي، نشتق هذه المعادلة  $y = y_1 z$  مرتين متتاليتين:

$$y' = y_1' z + y_1 z'$$

$$y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z''$$



نفرض  $y$  و  $y'$  و  $y''$  في (2) فبذلك أن =

$$(2) \quad y'' + [2y' + P(x)y] + [y' + P(x)y' + Q(x)y] = 0$$

نكتب  $y$  مد خاص أي أن

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

هذا تأخذ المعادلة (2) الشكل

$$(3) \quad y'' + (2y' + P(x)y) + (y' + P(x)y' + Q(x)y) = 0$$

وهذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية بالنسبة لـ  $y$  ومن الرتبة الأولى بالنسبة لـ  $y'$

$$y'' + (2y' + P(x)y) + (y' + P(x)y' + Q(x)y) = 0$$

$$y'' + (2y' + P(x)y) + (y' + P(x)y' + Q(x)y) = 0$$

كما نلاحظ مع معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ولن نوجد حلها العام يحتوي ثابت  
كيفية واحد نفرض في البداية  $y' = u$  ونكامل نحصل على  $y = \int u dx$  نحصل على ثابت  
آخر نفرض في العلاقة  $y = y_1 u$  فيكون هو الحل العام.

مثال توضيحي: لنكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$x^2 y'' - 2y = 0$$

أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة! إذا علمنا أن  $y_1 = x^2$  حل خاص لها.

$$y = x^2 u \quad \text{أي} \quad y = y_1 u$$

$$y' = 2x u + x^2 u'$$

$$y'' = 2u + 4x u' + x^2 u''$$

نقوم بدمج المعادلة المعطاة:

$$x^2 (2u + 4x u' + x^2 u'') - 2x^2 u = 0$$

$$x^2 u'' + 4x u' = 0$$

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{4}{x} \Rightarrow \ln \frac{u'}{C_1} = -4 \ln x$$

$$\ln \frac{u'}{C_1} = \ln \frac{1}{x^4}$$



SUBJECT: \_\_\_\_\_

$$v' = \frac{c_1}{x^4}$$

بالكامل نجد أن

$$v = c_2 \cdot \frac{1}{x^3} + c_0$$

حيث  $c_2 = -\frac{c_1}{3}$

$$y = y_1 \cdot v = x^2 \left( \frac{c_2}{x^3} + c_0 \right)$$

$$= \frac{c_2}{x} + x^2 c_0$$

$$y_2 = x^2 ; \quad y_1 = \frac{1}{x}$$